AM-GM — Cauchy-Schwarz — Jensen

AM-GM. Para cualesquiera reales no negativos $a_1, \dots, a_n$ se verifica

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

La igualdad se da si y solo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Ejercicios

1. Sean a, b, c reales positivos. Prueba que $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$

2. Sean a, b, c reales positivos. Prueba que $a^5 + b^5 + c^5 \geq a^3bc + b^3ca + c^3ab \geq abc(ab + bc + ca)$

3. Sean a, b, c reales positivos. Prueba que $a^7 + b^7 + c^7 \geq a^4b^3 + b^4c^3 + c^4a^3$

4. Sean a, b, c reales positivos cuya suma es 1. Prueba que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3 + 2\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$

5. Sean a, b, c reales positivos. Prueba que $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \leq a + b + c$

6. Sean a, b, c reales positivos verificando $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Prueba que $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 64$

7. Sean a, b, c, d reales positivos cuyo producto es 1. Prueba que $a^4b + b^4c + c^4d + d^4a \geq a + b + c + d$

8. Sean a, b, c reales positivos verificando $a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leq 4$ prueba que

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2}$$

Cauchy-Schwarz. Para cualesquiera reales $a_1, \dots, a_n$ y $b_1, \dots, b_n$ se verifica

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n) \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$$

La igualdad se da si y solo si existe un real r verificando $b_i = ra_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Ejercicios

1. Sean a, b, c reales. Prueba que $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$

2. Sean a, b, c reales no negativos. Prueba $\sqrt{3x^2 + xy} + \sqrt{3y^2 + yz} + \sqrt{3z^2 + zx} \leq 2(x + y + z)$.

3. (Desigualdad de Nesbitt) Sean a, b, c reales positivos. Prueba que $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

4. Sean a, b, c reales positivos cuyo producto es 1. Prueba que $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

5. Sean a, b, c reales positivos. Prueba que $\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1$

6. Sean a, b, c reales positivos. Prueba que $\sqrt{\frac{a}{a+b}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{c+a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$

7. Sean a, b, c reales positivos. Prueba que $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$

8. Sean $a_1, \dots, a_n$ reales positivos. Prueba que $\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + \cdots + a_n$

9. Sean a, b, c, d reales positivos verificando $a^2+b^2+c^2+d^2 = 4$. Prueba que $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{a} \geq 4$

Jensen. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ función convexa. Para cualesquiera $a_1, \dots, a_n \in (a, b)$ se verifica

$$\frac{f(a_1) + \cdots + f(a_n)}{n} \geq f(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n})$$

Ejercicios

1. Sean a, b, c, d reales positivos verificando $a + b + c + d = 4$. Prueba que $\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^2} \geq \sum_{\text{cyc}} a^2$

2. Sean a, b, c reales positivos. Prueba que $\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{2a^2+a+1} \leq \frac{3}{4}$

3. Sean a, b, c reales positivos. Prueba que $a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$

4. Sean a, b, c reales positivos verificando $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Prueba que

$$\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \leq \frac{1}{6ab + c^2} + \frac{1}{6bc + a^2} + \frac{1}{6ca + b^2}$$

Ecuaciones Funcionales

1. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Z}$ se verifica

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

2. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica

$$f(x + f(x + y)) = f(2x) + y$$

3. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica

$$f(x)f(y) + f(x + y) = xy$$

4. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que para cualquier $m \in \mathbb{N}$ se verifica

$$f(f(m)) = m + 1$$

5. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tales que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}_+$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ con $f(\lambda) = 1$ se verifica

$$f(x)f(y) + f(\frac{\lambda}{x})f(\frac{\lambda}{y}) = 2f(xy)$$

Polinomios

Teorema. Sea P un polinomo con coeficientes enteros y a y b enteros distintos. Entonces

$$(a-b)|(P(a)-P(b))$$

.

1. ¿Existe algún polinomio de coeficientes enteros verificando $P(1000) = 1000$ y $P(3000) = 4000$?

2. Sea P polinomio con coeficientes enteros. Desmuestra que si existe un entero k tal que ninguno de los enteros $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ es divisible por k entonces P no tiene raices enteras.

3. En la gráfica de un polinomio con coeficientes enteros elegimos dos puntos con coordenadas enteras. Prueba que si la distancia entre ambos es un entero entonces el segmento que los conecta es entero.

4. Sea $P(x)$ polinomio de coeficientes enteros. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ secuencia de enteros verificando que $P(x_1) = x_2$, $P(x_2) = x_3$, $\ldots$, $P(x_n) = x_1$. Prueba que todos los x_i's son iguales.

5. Sea $P(x)$ polinomio de grado mayor o igual que 1 con coeficientes enteros y sea k entero positivo. Sea $Q(x) = P(P(\ldots(P(P(x)))\ldots))$, donde P ocurre k veces. Prueba que $Q(x)-x$ tiene a lo sumo n raices enteras.

Ordenes — Raices primitivas — Residuos cuadráticos

Sea n un entero cualquiera y p un primo cualquiera. Vamos a trabajar en $\mathbb{Z}_n$ y $\mathbb{Z}_p$.

Teorema de Euler. Si $a \in \mathbb{Z}_n^*$ entonces

$$a^{\phi(n)} = 1$$

Teorema de Fermat. Si $a \in \mathbb{Z}_p^*$ entonces

$$a^{p-1} = 1$$

El **orden** de a en $\mathbb{Z}_n^*$ es el menor entero e tal que $a^e = 1$.

Teorema. Si $a \in \mathbb{Z}_n^*$ y N entero verificando $a^N = 1$ entonces el orden de a divide a N.

Teorema. Si $a, b \in \mathbb{Z}_p$ y $p \equiv 3 \mod 4$. Si $a^2 + b^2 = 0$ entonces $a = 0$ y $b = 0$.

Un **elemento primitivo** en $\mathbb{Z}_p$ es un elemento de orden $p-1$.

Teorema. Existen elementos primitivos.

Un **residuo cuadrático** es un elemento de $\mathbb{Z}_p$ que es el cuadrado de otro elemento.

Teorema. En $\mathbb{Z}_p$ el -1 es residuo cuadrático si y solo si $p = 2$ o $p \equiv 1 \mod 4$.

Ejercicios.

1. Encuentra todos los enteros $n \geq 2$ verificando $n|2^n - 1$.

2. Resuelve $a^{11} + 11b^{11} + 111c^{11} = 0$ en $\mathbb{Z}$.

3. Encuentra la suma de todos los enteros $m \in \{1, \ldots, 300\}$ verificando que para cada $n \geq 2$ entero si $2013m|(n^n - 1)$ etnonces $2013m|(n - 1)$.

4. ¿Cuantas raices primitivas existen en $\mathbb{Z}_p$?

5. Encuentra todos los enteros positivos a y n tales que $n|((a + 1)^n - a^n)$.

6. Determina todos los enteros n tales que n divide a $2^{n-1} + 1$.